TEOREMA 6. *Si las ecuaciones de dos circunferencias no concéntricas* C_1 *y* C_2 *son*

$$C_1: \quad x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0,$$

$$C_2: \quad x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0,$$

la eliminación de x^2 *y* y^2 *entre estas dos ecuaciones da la ecuación lineal*

$$(D_1 - D_2)x + (E_1 - E_2)y + F_1 - F_2 = 0,$$

que es la ecuación del eje radical de C_1 *y* C_2.

Si C_1 *y* C_2 *se cortan en dos puntos diferentes, su eje radical coincide con su cuerda común; si* C_1 *y* C_2 *son tangentes entre sí, su eje radical es su tangente común, y si* C_1 *y* C_2 *no tienen ningún punto común, su eje radical no tiene ningún punto común con ninguno de ellos.*

El eje radical de C_1 *y* C_2 *es perpendicular a la recta de los centros; es también el lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que las longitudes de las tangentes trazadas por él a* C_1 *y* C_2 *son iguales.*

Consideremos tres circunferencias, de las cuales no hay dos que sean concéntricas. Cada par tiene un eje radical, y las tres, tomadas a pares, tienen tres ejes radicales Si las tres circunferencias no tienen una recta de los centros común, sus tres ejes radicales se cortan en un punto llamado *centro radical*. La demostración de la existencia del centro radical de tres circunferencias dadas se deja como ejercicio al estudiante.

EJERCICIOS. Grupo 17

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Escribir la ecuación de la familia de circunferencias concéntricas cuyo centro común es el punto $(-3, 5)$. Dibujar tres elementos de la familia, especificando el valor del parámetro en cada caso.

2. Escribir la ecuación de la familia de circunferencias cuyos centros están sobre el eje Y. Desígnense los dos parámetros por k_1 y k_2. Dibújense tres elementos de la familia conservando a k_1 constante y asignando a k_2 tres valores diferentes. Dibújense otros tres miembros de la familia haciendo que k_2 permanezca constante y asignando a k_1 tres valores diferentes.

3. Escribir la ecuación de la familia de todas las circunferencias que pasan por el origen. Dibujar seis elementos de la familia asignando valores a los dos parámetros como en el ejercicio 2.

4. Determinar la ecuación de la familia de circunferencias, cada una de las cuales pasa por el origen y el punto $(1, 3)$. Dibujar tres elementos de la familia, especificando el valor del parámetro en cada caso.

5. Dibujar las dos circunferencias cuyas ecuaciones son

$$C_1 \equiv x^2 + y^2 + 4x - 8y + 7 = 0 \quad \text{y} \quad C_2 \equiv x^2 + y^2 - 16x - 4y + 3 = 0.$$

También dibujar tres elementos de la familia $C_1 + kC_2 = 0$ para valores de k diferentes de 0 y -1, y demostrar que sus centros están sobre la recta de los centros de C_1 y C_2.

6. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $A(-8, 5)$ y por las intersecciones de las circunferencias $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 17 = 0$ y $x^2 + y^2 - 18x - 4y + 67 = 0$.

7. Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene su centro sobre el eje X y pasa por las intersecciones de las dos circunferencias dadas en el ejercicio 6.

8. Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el eje Y y pasa por las intersecciones de las dos circunferencias dadas en el ejercicio 6.

9. Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene su centro sobre la recta $2x + y - 14 = 0$ y que pasa por las intersecciones de las circunferencias

$$x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11 = 0 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 - 4x + 4y - 8 = 0.$$

10. Hallar la ecuación de la circunferencia de radio $\frac{5}{2}\sqrt{2}$ y que pasa por las intersecciones de las circunferencias $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 16 = 0$ y $x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0$. (Dos soluciones.)

11. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por las intersecciones de las circunferencias $x^2 + y^2 - 6x + 4 = 0$, $x^2 + y^2 - 2 = 0$, y que es tangente a la recta $x + 3y - 14 = 0$. (Dos soluciones.)

12. La ecuación de la familia de circunferencias dada en el teorema 4 del Artículo 42 no incluye a la ecuación de C_2. Usando dos parámetros k_1 y k_2, escríbase la ecuación de la familia de tal manera que incluya a C_2. (Véase la ecuación [6] del Artículo 36.) ¿A qué restricciones deben someterse los parámetros k_1 y k_2? ¿Qué relación debe existir entre k_1 y k_2 para obtener la ecuación de una línea recta?

13. Demostrar que las circunferencias C_1: $x^2 + y^2 - 3x - 6y + 10 = 0$ y C_2: $x^2 + y^2 - 5 = 0$, son tangentes. Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a C_1 y C_2 en su punto común y que pasa por el punto $A(7, 2)$. Demostrar que el centro de esta circunferencia está sobre la recta de los centros de C_1 y C_2.

14. Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a C_1 y C_2 del ejercicio 13 en su punto común y cuyo centro está sobre la recta $3x + y + 5 = 0$.

15. Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a C_1 y C_2 del ejercicio 13 en su punto común y cuyo radio es igual a $\frac{3}{2}\sqrt{5}$. (Dos soluciones.)

16. Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a C_1 y C_2 del ejercicio 13 en su punto común y que es tangente a la recta $x - 2y - 1 = 0$. (Dos soluciones.)

17. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $A(-10, -2)$ y por las intersecciones de la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 32 = 0$ y la recta $x - y + 4 = 0$.

18. Demostrar que las circunferencias $C_1 \equiv x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$ y $C_2 \equiv x^2 + y^2 + 10x - 6y + 33 = 0$ no se cortan. Demostrar que para $k = -2$ el elemento correspondiente de la familia $C_1 + kC_2 = 0$ es una circun-